

基于高阶多项式的条纹投影标定方法

张庆辉¹, 黄婷婷¹, 吕磊^{2*}, 潘威³, 郑万兴¹¹河南工业大学信息科学与工程学院, 河南 郑州 450001;²河南工业大学复杂性科学研究院, 河南 郑州 450001;³广东奥普特科技股份有限公司, 广东 东莞 523860

摘要 相移轮廓术因其具有非接触、灵活且测量精度高等优势, 广泛用于三维形状信息获取。传统相移轮廓术标定方法存在步骤繁琐、误差敏感且耗时长等问题。基于多项式标定模型, 提出了一种基于稀疏贪婪随机 Kaczmarz 算法的快速标定方法, 所提方法同时具有随机稀疏 Kaczmarz 算法的高效迭代特性及贪婪算法的精选策略, 实现了对高阶多项式标定模型的快速拟合。实验结果表明, 所提方法具有较快的标定速度和较高的重建精度。

关键词 相移轮廓术; 高阶多项式; 稀疏贪婪随机 Kaczmarz 算法; 三维重构; 三频四步相移法

中图分类号 TN209

文献标志码 A

DOI: 10.3788/CJL241279

1 引言

相移轮廓术(PSP)是一种基于条纹编码的三维测量方法, 应用于文物保护、虚拟现实、生物医学等多个领域^[1-4], 具有非接触、点云密集和速度快等优点。典型的 PSP 系统通过投影仪将周期性正弦条纹投射到被测物体表面, 相机采集经物体表面调制的变形条纹图案, 进而提取其相位信息, 最后基于相位信息及系统标定参数重建物体的三维形貌^[5-10]。

系统标定可确定相位与三维坐标之间的映射关系^[11-14]。标定方法可分为两类。一类是基于相位与三维坐标点映射的标定方法, 此类方法需要使用面积大且精度高的标定靶, 标定过程需要精密平移台控制标靶移动以获取不同距离的标定图像, 进而确定高度和相位之间的关系。这类方法的标定过程复杂, 且最终的模型参数受标定靶平移精度以及标定靶精度的影响。另一类是基于立体视觉的标定方法, 此类方法在获得标靶坐标及其对应相机和投影仪的图像坐标后, 使用非线性优化的方法确定标定参数, 计算过程耗时, 且标定参数精度受相机和投影仪中图像坐标精度的双重影响。

传统 PSP 系统标定方法存在步骤繁琐、耗时长、精度低等问题^[15-16]。多项式标定模型以多项式拟合的方式建立了物体的三维坐标、对应像素坐标及其绝对相位之间的关系^[17]。Léandry 等^[17]构建了 3 阶多项式标定模型, 并采用高斯法计算该模型中的 57 个系数,

但 3 阶多项式模型所求结果的精度较低。为了获得更高的系统标定精度, 多项式阶数要大于 4, 然而这将使得待标定系数增加至 102 个, 引起工作量大和耗时严重等问题。

Huang 等^[18]建立了带有常数项的 3 阶多项式标定模型, 通过最小二乘法(LSM)拟合多项式系数, 提高了标定精度。但当多项式阶数大于 3 时, LSM 的拟合稳定性较差, 且计算速度较小。为解决此问题, Yu 等^[19]利用主成分分析(PCA)法对高次多项式标定模型进行简化, 提高了计算速度和稳定性, 但降低了被测物体的重建精度。Liu 等^[20]提出了一种基于多项式标定模型的高速现场可编程门阵列(FPGA)架构, 通过在 FPGA 中实现相位包裹、相位展开、有效像素提取、反相位误差校正和多项式拟合等步骤, 提高物体的三维重建速度。但由于所用多项式是 3 阶的, 物体重建结果仍会受到低阶多项式标定模型拟合精度低的限制。

多项式标定模型在非线形表面重构方面具有更大的灵活性, 不仅允许相机和投影仪灵活排列, 而且避免投影仪模型的参数计算和平移台的精准控制及对准问题^[18, 20-21]。增加多项式阶数可更加准确地描述物体的三维坐标、对应像素坐标及其绝对相位之间的关系。但多项式阶数过高会导致计算速度下降、计算结果不稳定等问题。因此, 迫切需要一种能够快速求解高阶多项式标定模型的算法, 以提升基于多项式标定模型的 3 维重构方法的准确性和效率。

收稿日期: 2024-10-17; 修回日期: 2024-12-21; 录用日期: 2025-01-13; 网络首发日期: 2025-01-23

基金项目: 国家自然科学基金(62375078, 62073123)、河南省高等学校重点科研项目计划(24ZX011)、河南省重点研发专项(231111222100)

通信作者: *lulei@haut.edu.cn

本文提出了一种针对高阶多项式标定模型的快速标定方法。在高阶多项式标定模型构建完成后,采用稀疏贪婪随机 Kaczmarz (SGRK)算法进行模型参数拟合,获取标定模型的系数矩阵。该算法具有随机稀疏 Kaczmarz(RSK)算法的高效迭代特性及贪婪算法的精选策略,加快了拟合的速度,并提高了计算精度和稳定性。最后根据所得系数矩阵,将物体条纹图像坐标和对应的绝对相位代入多项式模型,完成对三维物体的重构。

2 基于 SGRK 的多项式拟合标定算法

2.1 相位提取算法

以四步相移轮廓术为例,物体上正弦条纹图像的光强分布^[22]可表示为

$$I_i(u, v) = I'(u, v) + I''(u, v) \cos[\varphi(u, v) + \delta_i] \quad (1)$$

式中: (u, v) 为像素点坐标; $I'(u, v)$ 为背景光强; $I''(u, v)$ 为调制强度; $\varphi(u, v)$ 为相位分布; i 为相移条纹

图像的索引; δ_i 为相移量。令 $i = 1, 2, 3, 4$,通过式(1)可得4个公式,求解可得包裹相位 $\varphi(u, v)$ 为

$$\varphi(u, v) = \arctan\left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}\right), -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2)$$

利用相位解包裹方法将包裹相位 $\varphi(u, v)$ 转换为连续分布的绝对相位 $\phi(u, v)$ 。本文采用多频外差法(三频四步相移)对包裹相位 $\varphi(u, v)$ 进行展开,即

$$\phi(u, v) = \varphi(u, v) + O_1(u, v) \times 2\pi \quad (3)$$

式中: $O_1(u, v)$ 为条纹级数。

2.2 基于多项式拟合的重构模型

在 $O_w X_w Y_w Z_w$ 的世界坐标系中,世界坐标 (W_x, W_y, W_z) 和像素坐标 (u, v) 、绝对相位 ϕ 之间存在映射关系^[18],即

$$(W_x, W_y, W_z) = f(u, v, \phi) \quad (4)$$

式中: s 为像素坐标点的个数。

由此可知,相平面上点的世界坐标 (W_x, W_y, W_z) 可以用 u, v, ϕ 的 n 阶多项式数学模型^[18]来表示:

$$W_x = x_{x1} + x_{x2}u + x_{x3}v + x_{x4}\phi + x_{x5}u^2 + x_{x6}v^2 + x_{x7}\phi^2 + x_{x8}uv + x_{x9}u\phi + x_{x10}v\phi + \dots + x_{x_{m-2}}u^n + x_{x_{m-1}}v^n + x_{x_m}\phi^n \quad (5)$$

$$W_y = x_{y1} + x_{y2}u + x_{y3}v + x_{y4}\phi + x_{y5}u^2 + x_{y6}v^2 + x_{y7}\phi^2 + x_{y8}uv + x_{y9}u\phi + x_{y10}v\phi + \dots + x_{y_{m-2}}u^n + x_{y_{m-1}}v^n + x_{y_m}\phi^n \quad (6)$$

$$W_z = x_{z1} + x_{z2}u + x_{z3}v + x_{z4}\phi + x_{z5}u^2 + x_{z6}v^2 + x_{z7}\phi^2 + x_{z8}uv + x_{z9}u\phi + x_{z10}v\phi + \dots + x_{z_{m-2}}u^n + x_{z_{m-1}}v^n + x_{z_m}\phi^n \quad (7)$$

式中: n 表示多项式的阶数; m 表示多项式参数的项数; $x_{x1} \sim x_{x_m}, x_{y1} \sim x_{y_m}$ 和 $x_{z1} \sim x_{z_m}$ 为多项式待求参数。

根据式(5)~(7),将多项式模型表示成如下的形式:

$$W = Ax \quad (8)$$

式中: W 为世界坐标系下的三维坐标; x 为 $m \times 1$ 的矩阵,代表多项式标定模型的参数; A 为包含 u, v, ϕ 的 n 阶多项式基的 $s \times m$ 的矩阵,可表示为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 & \phi_1 & \dots & u_1^n & v_1^n & \phi_1^n \\ 1 & u_2 & v_2 & \phi_2 & \dots & u_2^n & v_2^n & \phi_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_s & v_s & \phi_s & \dots & u_s^n & v_s^n & \phi_s^n \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(8)中的像素坐标、绝对相位均已知,当对应的世界坐标已知时,可通过多项式拟合方法获得标定参数 $x_{x1} \sim x_{x_m}, x_{y1} \sim x_{y_m}$ 和 $x_{z1} \sim x_{z_m}$,即实现PSP系统的多项式标定。标定板特征点的世界坐标可作为标定的输入并由张氏标定法获得^[23]。

本文选取3阶、4阶和5阶多项式模型进行实验研究,其中3阶模型具有60个参数,4阶模型具有105个参数,5阶模型具有168个参数。理论上,3阶模型的精度较低,而5阶模型虽然具有较高的精度,但因参数过多,计算耗时较长。相比之下,4阶多项式模型能够在保证较高重构精度的同时,显著缩短计算时间。综合

考虑重构精度与计算效率的平衡,最终选择4阶模型作为实验中的标准模型,以确保在高效计算的前提下能够较好地拟合实验数据。

2.3 基于 SGRK 算法的多项式拟合

为实现基于多项式标定模型的三维重构,需要采用多项式拟合的方法进行模型参数求解。传统LSM通过最小化目标函数来估计模型参数,对于多项式标定模型,其目标是寻找一组参数,使得通过多项式模型生成的预测值与实际测量值之间的误差最小。然而,在数据噪声较大或模型复杂度较高的情况下,LSM容易产生过拟合或欠拟合现象,从而导致数值计算的不稳定性。为了解决这一问题,本文采用SGRK算法计算多项式标定模型参数,该方法融合了RSK^[24]的高效迭代特性与贪婪算法^[25-28]的精选策略,能够加速收敛过程,并提高计算精度和稳定性^[29]。

本文在获取标定板上特征点的三维坐标、像素坐标以及对应的绝对相位之后,构建如式(8)所示的高阶多项式模型。然后,基于SGRK算法进行迭代计算,获取标定模型的参数。首先,将已知的 A 和 W 作为算法的输入,并将待求值初始化为 $x_0 = 0$,迭代值初始化为 $x_k^* = 0$,支持集初始化为 $S = \{1, \dots, m\}$ 。设迭代次数 $k = 0$,计算阈值 ϵ_k ,用于筛选对当前解向量有显著影响的方程,公式如下:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\|W - Ax_k\|_2^2} \max_{1 \leq i_k \leq m} \left(\frac{|W_{i_k} - a_{i_k} x_k|^2}{\|a_{i_k}\|_2^2} \right) + \frac{1}{\|A\|_F^2} \right] \quad (10)$$

式中： a_{i_k} 和 W_{i_k} 分别表示矩阵 A 和 W 的第 i_k 行； $\|A\|_F$ 表示矩阵 A 的 Frobenius 范数。根据阈值确定正整数指标集 U_k ，即对解向量有重要影响的方程的索引集合，公式如下：

$$U_k = \left\{ i_k \mid |W_{i_k} - a_{i_k} x_k|^2 \geq \epsilon_k \|W - Ax_k\|_2^2 \|a_{i_k}\|_2^2 \right\} \quad (11)$$

本文采用贪婪概率准则作为选择标准，该准则是按照残差大小决定该行被选择的概率，残差越大，则被选择的概率就越高。概率表示如下：

$$\Pr(r_{\text{row}} = i_k) = \frac{|r_k^{(i)}|^2}{\|r_k\|_2^2} \quad (12)$$

式中： $r_k^{(i)}$ 表示残差向量 r_k 的第 i 个分量，即每一行的残差向量，计算方法如下：

$$r_k^{(i)} = \begin{cases} W^{(i)} - A^{(i)} x_k, & i \in U_k \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (13)$$

式中： $W^{(i)}$ 为 W 的第 i 个向量； $A^{(i)}$ 为 A 的第 i 个向量。

根据式(12)，从集合 U_k 中选取用于迭代计算的行。根据贪婪概率准则从集合 U_k 中选择一行对标定参数进行迭代更新：

$$x_{k+1}^* = x_k^* + \frac{W_{i_k} - \langle \omega_{k+1} \odot a_{i_k}, x_k \rangle}{\|\omega_{k+1} \odot a_{i_k}\|_2^2} (\omega_{k+1} \odot a_{i_k})^T \quad (14)$$

式中： \odot 为哈达玛积，也称为逐元素积，是矩阵或向量的逐元素相乘操作； ω_{k+1} 表示第 $k+1$ 次迭代的权重，可表示为

$$\omega_{k+1}(l) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{k+1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中： $l = 1, 2, \dots, m$ 是权重向量 ω 中的索引；支持集 $S = \text{supp}(x_k) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_{jk} \neq 0\}$ ，表示在列向量 x_k 中非零元的下标所构成的集合。

最后，通过软阈值操作，计算出当前迭代的稀疏最优解：

$$x_{k+1} = S_\lambda(x_{k+1}^*) \quad (16)$$

式中： λ 为稀疏参数，用于控制解向量的稀疏性，且 $\lambda > 0$ ； $S_\lambda(x) = \max\{|x| - \lambda, 0\} \cdot \text{sign}(x)$ 。重复迭代式(10)~(16)，直到标定参数的相对标准误差(R_{SE})满足

$$R_{SE} = \frac{\|x_k - \hat{x}\|_2^2}{\|\hat{x}\|_2^2} < 10^{-6} \quad (17)$$

式中： \hat{x} 为系统 $W = Ax$ 的最小范数解。

当满足迭代停止条件时，算法会输出最优解，即标定模型的系数矩阵。按照上述步骤，分别迭代计算出式(8)的最优解 x_x, x_y, x_z ，从而完成系统的标定

工作。

通过引入了一个合适且实用的概率准则，使 SGRK 算法在每个迭代步中尽可能地选取系统 $W = Ax$ 中残差向量较大项所对应的行进行迭代计算，这样能达到更快的收敛速度。

完成系统的标定后，使用包含待测物体的条纹图上的像素点坐标及对应的绝对相位构建成矩阵 A 。此时矩阵 A 和 x_x, x_y, x_z 都为已知，可求出物体的三维坐标 (W_x, W_y, W_z)，完成物体的三维重建。

综上所述，基于多项式标定模型的三维测量重建可以分为以下几个步骤：

1) 将圆形标定板放置在摄像机和投影仪的视场中，投影条纹并拍摄标定板图像。通过调整标定板位置和姿态，确保其在图像中占据足够的区域。

2) 拍摄多幅带条纹的标定板图像，采用张氏标定法获取相机参数。

3) 选取标定板的圆中心点作为特征点，并提取每张图像特征点的像素坐标 (u, v_s)。通过相移法得到特征点的绝对相位 ϕ_s ，并计算特征点的世界坐标 W_s 。

4) 特征点像素坐标 (u, v_s) 及其绝对相位 ϕ_s 和特征点的世界坐标 W_s 均已得到，采用 SGRK 算法确定出系数矩阵即可完成 PSP 系统的标定。

5) 将包含待测物体的图像坐标 (u, v) 和绝对相位 ϕ 代入步骤 4) 中确定高阶多项式标定模型，求解点的世界坐标 (W_x, W_y, W_z)，完成物体三维形状的重构。

3 实验及结果分析

三维测量系统的实验设备由投影仪、CCD 摄像机、圆形标定板以及计算机组成。投影仪的型号为 DLP Light Crafter 4500，分辨率为 912 pixel \times 1140 pixel；摄像机是由千眼狼制造，配备 CCD 传感器，分辨率为 1280 pixel \times 1024 pixel，像素尺寸为 10 μm \times 10 μm ，镜头型号为 Computer AcuteEye-2M-1000；圆形标定板尺寸为 300 mm \times 300 mm，两圆心之间的距离是 30 mm。实验系统如图 1 所示。

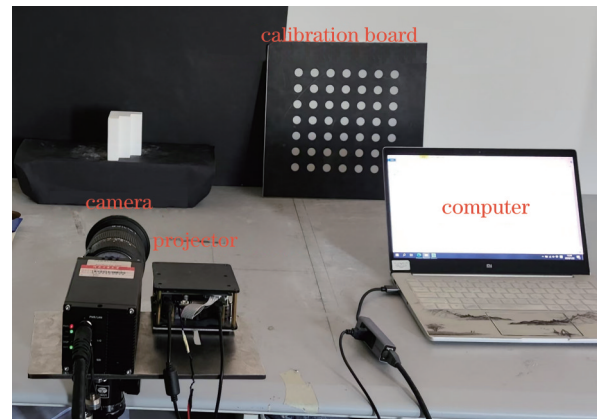


图 1 实验系统设置

Fig. 1 Experimental system setup

图 2 为标定板图案。首先,根据实验步骤获取带有条纹图案的标定板图像,如图 2(b)所示,并拍摄不同姿态的多幅图像,如图 3 所示。提取特征点像素坐

标,将其与解包裹相位、世界坐标一同代入高阶多项式标定模型,并采用 SGRK 方法对模型参数进行迭代计算,完成系统的标定。

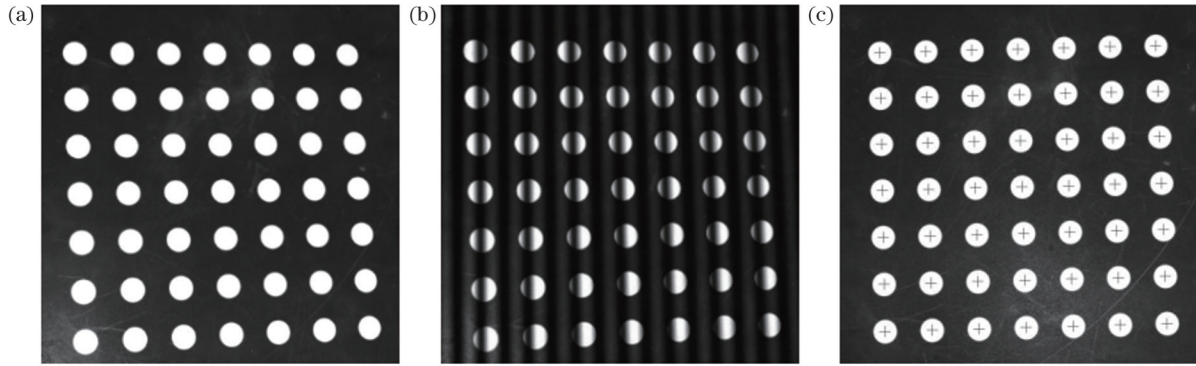


图 2 标定板图案。(a)圆形标定板;(b)带条纹图案的标定板;(c)标定板图像平面上特征点的选择

Fig. 2 Calibration plate patterns. (a) Circular calibration plate; (b) calibration plate with stripe pattern; (c) selection of feature points on image plane of calibration plate

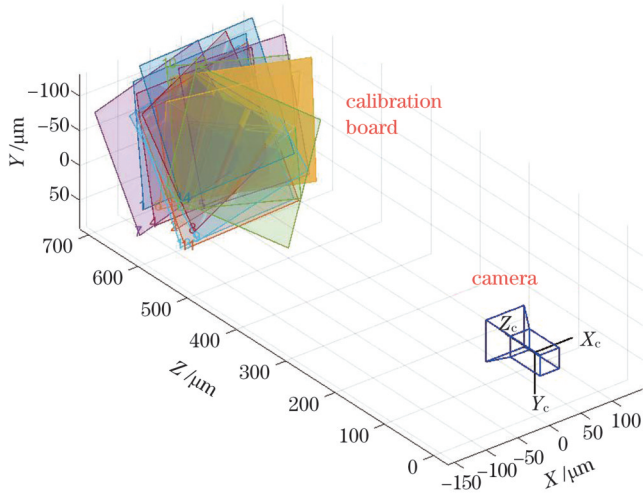


图 3 标定板的位置示意图

Fig. 3 Schematic diagram of position of calibration plate

算法的 R_{SE} 随着迭代步数变化的曲线如图 4 所示。最后,利用该系统进行物体的三维形状重建。

本文对如图 5 所示的标准台阶和标准陶瓷球进行三维重建,以评估 SGRK 算法的高阶多项式模型的三

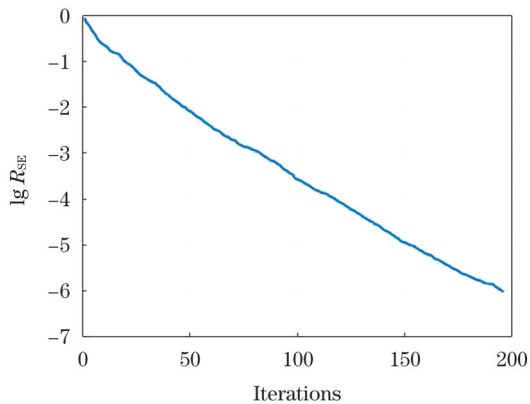


图 4 误差随着迭代步数变化的曲线

Fig. 4 Error varying with number of iterations

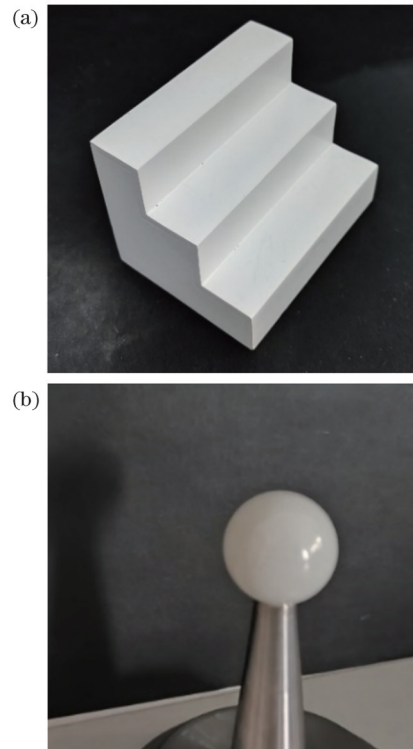


图 5 标准物体。(a)标准台阶;(b)陶瓷标准球

Fig. 5 Standard objects. (a) Standard steps; (b) ceramic standard ball

维重建精度。陶瓷具有高精度、小膨胀系数等性能,适用于评估高阶多项式模型的重建精度。标准台阶中相邻台阶之间的距离分别为 20.001 mm 和 20.003 mm,标准球的直径为 25.0001 mm。

为验证本文方法的优势,分别采用 LSM 和本文方法标定 4 阶多项式模型及其简化模型^[19],完成标准台阶的三维重构。为解决传统方法中 4 阶模型参数量大、模型计算耗时长等问题,Yu 等通过主成分分析识别出多项式模型中的冗余项,并将其在标定过

程中忽略,进而对模型进行简化。所提方法无需简化即可实现高精度标定,凭借其优异的稳定性,有效避免了高阶多项式模型的潜在问题,并确保了重建精度。

图 6(a)~(d)展示了采用不同方法测量并恢复得到的台阶三维形貌图,从图中可以直观地观察到,采用 SGRK 算法拟合的 4 阶多项式模型所恢复的台阶三维形貌效果最佳。

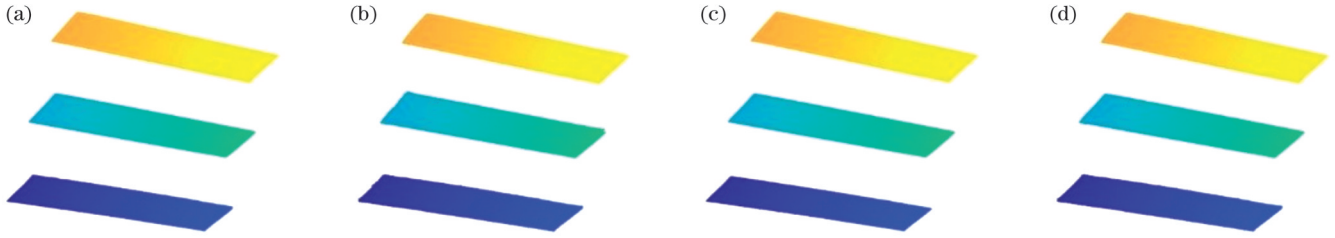


图 6 台阶三维形貌图。(a)LSM 恢复的台阶三维形貌;(b)LSM(简化)恢复的台阶三维形貌;(c)SGRK 恢复的台阶三维形貌;(d)SGRK(简化)恢复的台阶三维形貌

Fig. 6 Step 3D topographies. (a) Step 3D topography recovered by LSM; (b) step 3D topography recovered by LSM (simplified); (c) step 3D topography recovered by SGRK; (d) step 3D topography recovered by SGRK (simplified)

对于台阶点云数据,将 3 个台阶表面上的点云拟合平面方程,并计算相邻平面方程的距离,从而得到相邻台阶面之间的测量距离。为了验证多次测量的重复精度,在每次标定实验完成后,本文对台阶进行了 3 次

测量实验。表 1 展示了相邻台阶之间的真实值、两种方法恢复的测量值、平均误差及耗时。由表 1 可知,本文方法拟合的 4 阶多项式模型在重建精度上优于 LSM,且速度更快。

表 1 台阶测量几何偏差比较

Table 1 Comparison of geometric deviations of step measurements

Method	LSM		LSM (simplified)		SGRK		SGRK (simplified)	
True value /mm	20.003	20.001	20.003	20.001	20.003	20.001	20.003	20.001
Measured value 1 /mm	20.011	20.027	20.002	19.972	20.015	19.991	20.007	20.012
Measured value 2 /mm	20.001	19.982	20.029	20.027	20.007	20.016	19.988	19.995
Measured value 3 /mm	20.025	20.012	19.937	19.974	19.999	19.988	19.999	20.008
Average error /mm	0.009	0.006	-0.014	-0.010	0.004	-0.003	-0.005	0.004
Time /s	4.32		3.05		1.78		1.52	

为进一步验证本文方法在曲面建模方面的优势,完成标准陶瓷球的重建后,对获取的标准球的点云进行球体拟合,得到拟合球的拟合直径,并计算直径偏差和标准偏差。表 2 展示了拟合球体的几何偏差,并描

述了 LSM 和本文方法分别用于 4 阶多项式模型重构及简化多项式模型重构^[18-19]的结果。通过这两种方法获取 4 组点云数据,并计算得到对应的 4 组拟合球体的几何偏差。

表 2 标准陶瓷球的几何偏差比较

Table 2 Comparison of geometric deviations of standard ceramic balls

Method	LSM	LSM (simplified)	SGRK	SGRK (simplified)
True value /mm	25.0001	25.0001	25.0001	25.0001
Fitted diameter /mm	25.0728	24.9069	25.0233	24.9552
Diameter deviation /mm	0.0727	0.0932	0.0232	0.0449
Time /s	3.96	3.17	1.63	1.17

由表 2 可知,本文方法得到的拟合球精度显著优于使用 LSM 得到的结果,且简化后 4 阶模型的精度均低于未简化模型。图 7 展示了拟合球面的彩色误差图,进一步直观验证本文方法的重构精度高于 LSM。

图 8 和表 3 所示。表 2、3 和图 7、8 的实验结果表明,5 阶标定模型在重构精度上优于 4 阶标定模型,但其参数量达到 168 个,导致计算时间显著增加;与此同时,4 阶和 5 阶标定模型在精度上均优于 3 阶标定模型。在 3 阶、4 阶和 5 阶标定模型下,SGRK 方法的标定精度明显优于相应的 LSM。此外,SGRK 方法在计算效率上也表现出显著优势,所需时间显著少于 LSM。

为进一步验证所提方法的有效性,本文采用 LSM 和 SGRK 方法分别拟合 3 阶和 5 阶标定模型,进而重构标准陶瓷球并计算其直径的几何偏差,相关结果如

此外,本文还测量了包含复杂形状的陶瓷玩偶。

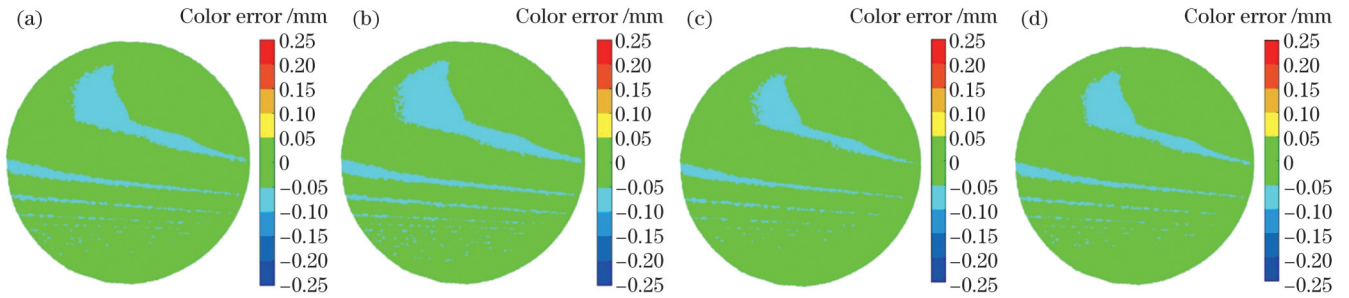


图 7 拟合球面彩色误差图。(a)LSM 拟合球面彩色误差图; (b)LSM(简化)拟合球面彩色误差图; (c)SGRK 拟合球面彩色误差图; (d)SGRK(简化)拟合球面彩色误差图

Fig. 7 Fitted spherical color error plots. (a) Spherical color error plot fitted by LSM; (b) spherical color error plot fitted by LSM (simplified); (c) spherical color error plot fitted by SGRK; (d) spherical color error plot fitted by SGRK (simplified)

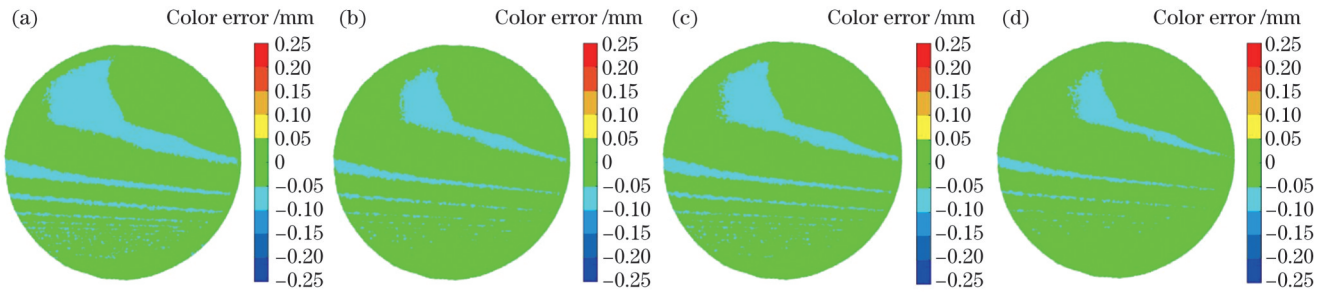


图 8 拟合球面彩色误差图。(a)LSM(3阶)拟合球面彩色误差图; (b)LSM(5阶)拟合球面彩色误差图; (c)SGRK(3阶)拟合球面彩色误差图; (d)SGRK(5阶)拟合球面彩色误差图

Fig. 8 Fitted spherical color error plots. (a) Spherical color error plot fitted by LSM (3rd order); (b) spherical color error plot fitted by LSM (5th order); (c) spherical color error plot fitted by SGRK (3rd order); (d) spherical color error plot fitted by SGRK (5th order)

表 3 标准陶瓷球的几何偏差比较

Table 3 Comparison of geometric deviations of standard ceramic balls

Method	LSM (3-step)	LSM (5-step)	SGRK (3-step)	SGRK (5-step)
True value /mm	25.0001	25.0001	25.0001	25.0001
Fitted diameter /mm	25.1471	24.9601	25.0550	24.9824
Diameter deviation /mm	0.1470	0.0400	0.0549	0.0177
Time /s	3.04	6.15	1.02	2.31

图 9(a)展示了陶瓷玩偶的原始图像,图 9(b)和图 9(c)分别为采用 LSM 和本文所提方法进行重构的结果,本文方法可高精度重建复杂物体。以 Mech-Eye Pro S Enhanced 扫描仪获得的三维数据为真值,计算得到了 LSM 和本文所提方法的均方根误差(RMSE),分别为 0.9250 mm 与 0.0729 mm。实验结果表明,本文方法在重构复杂曲面物体时,能够获得更加精确的三维重建效果,表现出较好的适应性和高精度重建能力。

本文通过对比分析 LSM 与 SGRK 方法在 3 阶、4

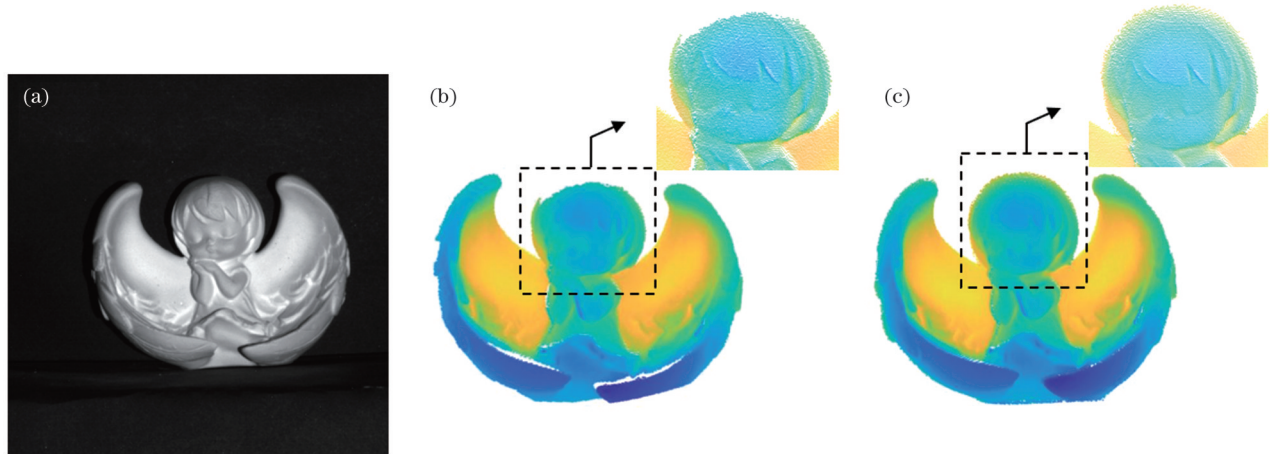


图 9 陶瓷玩偶重构图。(a)陶瓷玩偶; (b)LSM 重构玩偶图; (c)SGRK 重构玩偶图

Fig. 9 Ceramic doll reconstruction images. (a) Ceramic doll; (b) doll reconstructed by LSM; (c) doll reconstructed by SGRK

阶及 5 阶多项式标定模型中的拟合精度与计算耗时,验证了基于 SGRK 算法的高阶多项式三维重建系统在简单物体和复杂曲面物体的三维形貌恢复方面的有效性。实验结果表明,SGRK 算法在所有模型阶数下均能显著提高重建精度,并且在计算效率上相较于 LSM 具有明显优势,呈现出更为优越的性能,这为高精度三维重建技术在复杂物体重建中的应用提供了强有力的支持。

4 结 论

本文提出了一种基于稀疏贪婪随机 Kaczmarz 算法的高阶多项式标定模型快速标定方法。该算法基于选择系数矩阵行的概率准则,能够更快地达到收敛要求,从而有效提升标定速度和稳定性。最后,将绝对相位和图像坐标代入高阶多项式模型,以求解世界坐标,重建物体表面的三维形貌。实验结果表明,该重建系统具有操作简单、标定速度快和精度高等优点。

参 考 文 献

- [1] Yu J, Gao N, Meng Z, et al. High-accuracy projector calibration method for fringe projection profilometry considering perspective transformations [J]. *Optics Express*, 2021, 29(10): 15053-15066.
- [2] 骆志明, 周易非, 李睿, 等. 数字图像相关法辅助的条纹投影轮廓术相位展开方法[J]. *光学学报*, 2024, 44(14): 1412004.
Luo Z M, Zhou Y F, Li R, et al. Digital image correlation-assisted phase unwrapping for temporal fringe projection profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2024, 44(14): 1412004.
- [3] Alkhatib M N, Shmelev Y D, Tyshova O A, et al.: 3D measurement using fringe projection profilometry[J]. *Computer Optics*, 2023, 47(6): 913-919.
- [4] Juarez-Salazar R, Rodriguez-Reveles G A, et al. Three-dimensional spatial point computation in fringe projection profilometry[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2023, 164: 107482.
- [5] 郭彬, 马锁冬, 王俊冬, 等. 神经网络驱动的双频虚拟步进条纹投影轮廓术[J]. *中国激光*, 2025, 52(1): 0104002.
Guo B, Ma S D, Wang J X, et al. Dual-frequency virtual-stepping fringe projection profilometry driven by neural networks[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2025, 52(1): 0104002.
- [6] Lu L, Bu C H, Su Z L, et al. Generative deep learning-embedded asynchronous structured light for three-dimensional imaging[J]. *Advanced Photonics*, 2024, 6(4): 046004.
- [7] 左超, 张晓磊, 胡岩, 等. 3D 真的来了吗?: 三维结构光传感器漫谈[J]. *红外与激光工程*, 2020, 49(3): 0303001.
Zuo C, Zhang X L, Hu Y, et al. Has 3D come to age? An introduction to a 3D structured light sensor. [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2020, 49(3): 0303001.
- [8] 冯创, 罗明灵, 邓高旭, 等. 基于参考标准件的多结构光三维测量方法[J]. *中国激光*, 2024, 51(17): 1704002.
Feng C, Luo M L, Deng G X, et al. Multiview structured light 3D measurement method based on reference standard parts[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2024, 51(17): 1704002.
- [9] 徐洪志, 汪宇, 杨玲玲, 等. 彩色条纹投影运动物体三维测量方法[J]. *激光与光电子学进展*, 2024, 61(10): 1011013.
Xu H Z, Wang Y, Yang L L, et al. Three-dimensional shape measurement of moving object with color fringe projection[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2024, 61(10): 1011013.
- [10] 李训仁, 郭文博, 张启灿, 等. DLP 投影任意比特数条纹实现三维面形测量[J]. *光学学报*, 2023, 43(7): 0712003.
Li X R, Guo W B, Zhang Q C, et al. Three-dimensional shape measurement by arbitrary bit fringe projection using a DLP projector[J]. *Acta Optica Sinica*, 2023, 43(7): 0712003.
- [11] Li Z B, Li S, Luo X. An overview of calibration technology of industrial robots[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(1): 23-36.
- [12] 吴周杰, 张启灿. 基于条纹投影的高速三维形貌测量技术发展综述[J]. *激光与光电子学进展*, 2023, 60(8): 0811001.
Wu Z J, Zhang Q C. High-speed 3D topography measurement based on fringe projection: a review[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2023, 60(8): 0811001.
- [13] Hu Y, Chen Q, Feng S J, et al. Microscopic fringe projection profilometry: a review[J]. *Optics Lasers Engineering*, 2020, 135: 106192.
- [14] Feng S J, Zuo C, Zhang L, et al. Calibration of fringe projection profilometry: a comparative review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2021, 143: 106622.
- [15] Zhu F P, Shi H J, Bai P X, et al. Nonlinear calibration for generalized fringe projection profilometry under a large measuring depth range[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(32): 7718-7723.
- [16] 赵涵卓, 丁宇航, 张宗华, 等. 条纹投影测量系统标定方法研究[J]. *河北工业大学学报*, 2023, 52(3): 17-28.
Zhao H Z, Ding Y H, Zhang Z H, et al. Research on the calibration method of fringe projection measurement systems [J]. *Journal of Hebei University of Technology*, 2023, 52(3): 17-28.
- [17] Léandry I, Brèque C, Valle V. Calibration of a structured-light projection system: development of large-dimension objects[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2012, 50(3): 373-379.
- [18] Huang J H, Wu Q Y. New reconstruction method based on fringe projection of three-dimensional measuring system[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2014, 52: 115-122.
- [19] Yu L D, Zhang W, Li W S, et al. Simplification of the high-order polynomial calibration model for fringe projection profilometry[J]. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(10): 105202.
- [20] Liu D M, Pan Y F, Lu R S. FPGA-assisted high-precision, high-speed 3D shape measurement[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020, 315: 112366.
- [21] Miao Y P, Yang Y, Hou Q Y, et al. High-efficiency 3D reconstruction with a uniaxial MEMS-based fringe projection profilometry [J]. *Optics Express*, 2021, 29(21): 34243-34257.
- [22] 李乐阳, 吴周杰, 张启灿. 基于相移条纹分析的相位误差补偿技术发展综述(特邀)[J]. *激光与光电子学进展*, 2024, 61(2): 0211008.
Li Y Y, Wu Z J, Zhang Q C. Phase error compensation technique based on phase-shifting fringe analysis: a review (invited) [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2024, 61(2): 0211008.
- [23] Zhang Z Y. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations[C]//*Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*, September 20-27, 1999, Kerkyra, Greece. New York: IEEE Press, 2002: 666-673.
- [24] Niu Y Q, Zheng B. A randomized sparse Kaczmarz solver for sparse signal recovery via minimax-concave penalty[J]. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 2024, 47(7): 6431-6445.
- [25] Liu Y, Liu S M, Zhang Z Y. Accelerated greedy randomized Kaczmarz algorithm for solving linear systems[J]. *IAENG International Journal of Computer Science*, 2023, 50(3): 1-7.
- [26] Chen N, Zhu D L. Greedy randomized extended Kaczmarz algorithm for noisy linear systems [J]. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 2023, 13(2): 913-927.
- [27] Tan L Z, Guo X P. Nonlinear greedy randomized Kaczmarz methods for solving large-scale systems of nonlinear equations[EB/OL]. [2024-11-12]. <https://www.researchsquare.com/article/rs-2476966/v1>.
- [28] 王泽, 殷俊锋. 求解线性方程组稀疏解的稀疏贪婪随机 Kaczmarz 算法[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2021, 49(11): 1505-1513.
Wang Z, Yin J F. Sparse greedy randomized Kaczmarz method for sparse solutions to linear equations[J]. *Journal of Tongji University*

Calibration Method of Fringe Projection Based on High-Order Polynomial

Zhang Qinghui¹, Huang Tingting¹, Lü Lei^{2*}, Pan Wei³, Zheng Wanxing¹

¹*School of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, Henan, China;*

²*Institute for Complexity Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, Henan, China;*

³*Guangdong Optronics Technology Co., Ltd., Dongguan 523860, Guangdong, China*

Abstract

Objective Because of its advantages of non-contact, flexibility, and high measurement accuracy, phase-shift profilometry is widely used to obtain three-dimensional shape information, which is particularly valuable in the fields of industrial inspection, precision manufacturing, and medical imaging. However, traditional phase-shift fringe calibration methods involve cumbersome steps, high error sensitivity, and high time consumption. To solve these problems, a polynomial calibration model is introduced to improve calibration accuracy. Theoretically, the higher the order of the calibration model, the higher the 3D reconstruction accuracy. However, as the order of the calibration model increases, the number of parameters grows rapidly. For example, the third-order polynomial calibration model needs to fit 60 parameters, which not only increases the computational complexity but also leads to computational instability, which in turn affects the calibration accuracy and computational efficiency. Therefore, there is an urgent need for an algorithm that can quickly solve the high-order polynomial calibration model to improve the accuracy and efficiency of 3D reconstruction methods based on polynomial calibration models. In this paper, we propose a fast calibration method for fringe projection based on high-order polynomial models, which has both the efficient iterative property of the stochastic sparse Kaczmarz algorithm and the selective strategy of the greedy algorithm, realizing fast fitting of high-order polynomial calibration models and thus improving the computational efficiency and accuracy of 3D reconstruction.

Methods In this paper, a fast calibration method for high-order polynomial calibration models is proposed with the aim of addressing the cumbersome steps, time-consuming computation, and low accuracy in the calibration of traditional phase-shift profilometry (PSP) systems. First, based on the construction of a high-order polynomial calibration model, the sparse greedy random Kaczmarz algorithm (SGRK) is used to fit the model parameters and obtain the coefficient matrix of the calibration model. This algorithm combines the efficient iterative properties of the stochastic sparse Kaczmarz algorithm with the selective strategy of the greedy algorithm, which significantly improves the speed of model fitting while ensuring computational accuracy and stability. Specifically, the method establishes the relationship among object 3D coordinates, pixel coordinates, and their phases through polynomial fitting, thus realizing fast optimization of high-order polynomial models. The application of the algorithm not only accelerates the calibration process but also effectively reduces the computational complexity and avoids the computational instability and efficiency bottlenecks that may occur in traditional methods. Ultimately, by substituting the pixel coordinates of the object fringe image with the corresponding absolute phase into the polynomial model, a high-precision 3D reconstruction of the object is accomplished. The proposed method provides a more efficient and accurate calibration solution for PSP systems, which has important theoretical significance and a wide range of practical applications, particularly in the fields of industrial inspection and precision manufacturing.

Results and Discussions Traditional polynomial-fitting methods often face problems such as computational speed degradation and unstable computational results, which limit their wide application in complex applications. Therefore, this paper proposes a high-order polynomial calibration method that incorporates the SGRK algorithm. Compared with the traditional least squares fitting method (LSM), the SGRK algorithm significantly improves the computational efficiency and stability through its efficient iterative property and greedy strategy and successfully overcomes the problems of slow computation speed and poor instability that exist in the traditional method. With this method, the fitting of high-order polynomial models can be completed in a shorter time, which significantly improves the speed (Tables 1 and 2) and accuracy (Figs. 6 and 7) of 3D reconstruction. The experimental results verify that the proposed method can effectively reduce the calibration time and significantly improve the reconstruction accuracy while ensuring the calibration accuracy (Table 3). In different scenarios, the proposed method shows obvious advantages compared with the traditional calibration method (Table 3 and Fig. 8), particularly when dealing with complex geometries, and the calibration error and

reconstruction accuracy are significantly improved (Fig. 9). By optimizing the iterative process of the algorithm, the proposed method not only improves the overall computational efficiency but also effectively copes with the demand for high-precision and high-efficiency 3D reconstruction.

Conclusions In conclusion, this paper proposes a fast calibration method based on the SGRK algorithm, which effectively solves a series of problems in traditional phase-shift profilometry calibration. By introducing the SGRK algorithm, the fitting efficiency and accuracy of the high-order polynomial calibration model are significantly improved, providing new ideas and methods for the development of 3D reconstruction technology. The experimental results verify the advantages of the proposed method in terms of calibration speed and 3D reconstruction accuracy, indicating that the method has important application value, especially in fields requiring efficient and accurate 3D reconstruction, such as cultural relic protection and biomedicine.

Key words phase shift profilometry; higher order polynomials; sparse greedy randomized Kaczmarz algorithm; three-dimensional reconstruction; three-frequency four-step phase shift method